

基于物理直观的“概率论与数理统计”教学 案例设计

陶红^a, 徐耀坤^b, 刘吉英^a, 侯臣平^a

国防科技大学 a. 理学院; b. 电子科学学院 湖南 长沙 410073

[摘要] 概率论与数理统计作为一门高度抽象的数学学科, 其核心概念往往因缺乏直观性而成为学生学习的难点。为提升教学效果, 增强学生的理论理解与应用能力, 本文借鉴“数学概念物理化”的教学思想, 分别针对泊松分布、数学期望与卷积公式, 从物理直观的角度出发, 设计了 α 粒子散射实验、质心坐标模型、矩形脉冲信号卷积计算的教学案例。基于物理直观的教学案例有助于学生构建直观认知、深化概念理解, 并提升其科学思维与工程素养。

[关键词] 数学概念物理化; 教学案例; 泊松分布; 数学期望; 卷积公式

[中图分类号] G642.0 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1893-9325(2026)-0064-14 **[收稿日期]** 2026-03-09

一、引言

概率论与数理统计是描述随机现象、分析数据规律的重要数学工具, 在通信、金融、人工智能等领域具有广泛应用, 是高校理工类、经管类专业的重要基础课程之一。然而, 该课程涵盖概率模型、随机变量、分布函数、抽样分布等抽象概念, 不仅内容繁多, 而且涉及大量公式与定理, 使得学生望而生畏。因此, 如何提升概率论与数理统计课程的教学质量, 成为高校数学教学研究的一个重要研究课题^[1]。

概率论与数理统计的研究对象是随机现象, 是一类具有统计规律性的不确定性现象, 与学生以往接触的研究确定性现象的数学课程不同, 学生常因课程中的概念缺乏物理直观而难以理解。已有研究表明, 通过数学概

念物理化, 即将抽象的概念与物理直观相结合, 不仅能够使数学概念更加简洁明了、易于理解, 还能培养学生跨学科建模的能力^[2]。概率论与数理统计中的很多概念均与物理世界具有紧密联系, 便于采用数学概念物理化的教学方法。具体而言, 随机变量作为概率论与数理统计中的重要概念, 建立起样本空间与实数集合的对应关系, 使微积分成为研究随机现象的理论基础^[3], 而微积分理论源于物理学对运动和变化的数学描述需求, 这使得概率统计概念与物理知识之间具有天然而然的相通性。例如, 数学期望的物理意义为总质量为 1 的质点或细棒对原点的质心坐标。因此, 通过物理直观为学生提供具象参照, 将“看不见的概率”转化为“可感知的物理量”, 能够有效降低认知负荷, 提升学习效

为了实施数学概念物理化的教学方法，本文针对泊松分布、数学期望与卷积公式设计了基于物理直观的教学案例。前两个案例是通用型案例，可以用于所有专业的学生。第三个案例是专业型案例，适用于通信相关专业的学生。

二、基于物理直观的案例设计

案例一： α 粒子散射实验帮助理解泊松分布的参数含义

泊松分布是一种常见的离散型概率分布，描述稀有事件发生的频数，如移动电话基站收到的手机呼叫信号次数、公共汽车站到达的乘客数、放射性分裂落到某区域的质点数等。若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数，则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$ 。

λ 的含义是泊松流中单位时间内质点出

现的比率，即单位时间内质点出现的平均数。相较于上一个学习内容二项分布中参数的含义，泊松分布中参数 λ 的含义没有那么好理解，为了让学生有更直观的感知，可以在教学中引入 α 粒子散射实验，将 λ 的含义物理化。

【 α 粒子散射实验】为了验证原子的核式结构模型，诺贝尔奖得主卢瑟福和他的合作者做了以 α 粒子轰击金箔的实验。如图 1 所示，实验装置由一个针发射源和不远处的一块荧光屏组成，每隔 7.5 秒记录一次打在荧光屏上的 α 粒子数。实验一共记录了 2608 个数据，每 7.5 秒里大约有 3.87 个 α 粒子打在荧光屏上。将观测频数与参数 $\lambda = 3.87$ 的泊松分布的理论频数进行对比^[4]。按照每 7.5 秒里荧光屏上记录的 α 粒子数量从 0 到 11 绘制的直方图如图 2 所示。

从对比结果可以看出，观测频数与理论频数之间的差异非常小，由 α 粒子散射实验的实验结果，可以直观地得出泊松分布中参数 λ 反映单位时间内质点出现的平均数。

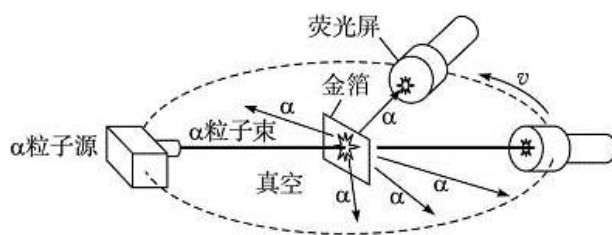


图 1 α 粒子散射实验装置图

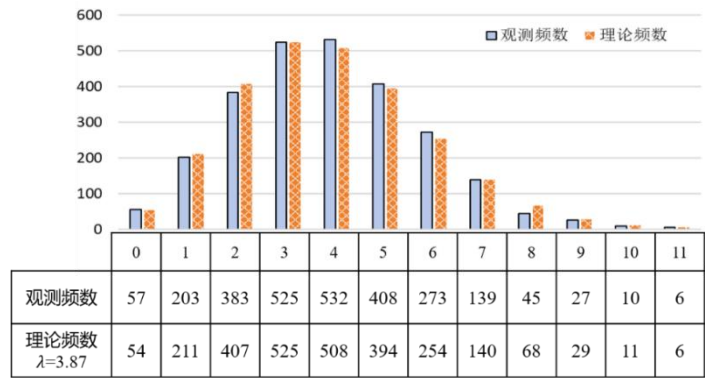


图 2 α 粒子观测频数与理论频数对比

案例二：基于质心坐标引入连续型随机变量数学期望定义

在数学期望的教学过程中，离散型随机变量的数学期望与学生以往学习过的平均值计算方法类似，学生比较容易接受。然而，对于连续型随机变量的数学期望的定义，则很多学生觉得缺乏物理直观。因此，借助数学概念物理化的方法，将离散型随机变量的数学期望理解成质量和为 1 的 n 个质点的质心

坐标，将质心坐标的计算方式由离散的 n 个质点推广至线密度为 $f(x)$ 的无限长细棒，再采用微元法求细棒的质心坐标，能够使得学生较好地理解^[3]。

【质心坐标模型】设直线上散布 n 个质点，坐标为 x_k ，质量为 $p_k(k = 1, 2, \dots, n)$ ，如图 3 (a) 所示，则全部质点对原点 O 的力矩和质心坐标分别为

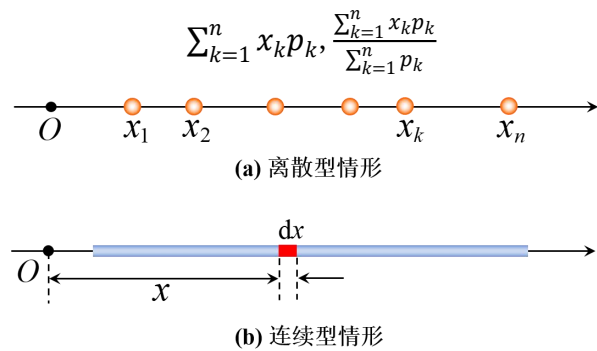


图 3 随机变量数学期望的物理含义

当总质量 $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ 时，则全部质点对原点 O 的力矩和质心坐标均为

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

可见对于离散型随机变量，其物理含义为总质量为 1 的质点集对原点的质心坐标，

其中质点集的质量与离散型随机变量的分布律相对应。

由质心坐标概念对物理系统的一致性，将质点集扩展至 x 轴上线密度为 $f(x)$ 的无限长细棒，则可得到密度函数为 $f(x)$ 的连续型

随机变量的数学期望的定义。如图 3 (b) 所示, 用微元法求得长为 dx 的细棒对原点 O 的力矩为

$$x \cdot f(x)dx,$$

令 $dx \rightarrow 0$, 则整根细棒对原点 O 的力矩和质心坐标分别为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx, \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}.$$

当整根细棒质量 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 时, 则整根细棒对原点 O 的力矩和质心坐标均为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

由此得到连续型随机变量的数学期望的定义。

案例三: 信号分析中矩形脉冲信号的卷积计算

卷积公式是二维随机变量和的分布的一种特殊情况, 用于计算相互独立的两个随机变量的和的分布律或密度函数。将卷积公式中输入函数的适用范围推广, 则可得到信号分析与处理当中的卷积公式, 是一种用来描述线性移不变系统输出信号与输入信号关系的运算, 有非常直观的物理含义。对于电子电气、通信工程等通信相关专业而言, 卷积公式在信号分析与处理课程中具有重要地位^[5]。因此, 将概率论中的卷积公式与信号分析中具有明确物理含义的卷积公式联系起来, 不仅有助于提高学生理论联系实际的能力, 还有助于帮助学生了解课程与所学专业之间的联系, 提升学习兴趣和学习的目的性。

【背景介绍】卷积的引入来自于信号的脉冲分解。以连续信号为例, 任意信号 $x(t)$ 可以表示为不同延时的冲激信号之和, 即

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

任意信号 $x(t)$ 作用于线性时不变系统的零状态响应不容易求解, 但是冲激信号 $\delta(t)$ 作用于线性时不变系统的零状态响应, 即冲激响应 $h(t) = T[\delta(t)]$ 很容易得到。因此, 根据线性时不变系统的齐次性、可加性和时不变性可得, $x(t)$ 作用于线性时不变系统的零状态响应 $y(t)$ 可以表示为 $x(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分, 即

$$\begin{aligned} y(t) &= T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)T[\delta(t - \tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

卷积方法的实质就是将信号分解为冲激信号之和, 借助系统的冲激响应 $h(t)$, 求解系统对任意激励信号的零状态响应。

【问题提出】设某线性时不变系统的冲激响应 $h(t)$ 与输入信号 $x(t)$ 均为单位幅度、时宽为 1 的矩形脉冲, 即:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, h(t) \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

求该系统在零状态下的输出响应 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

【问题求解】由卷积公式的计算式有

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$, 由 $x(t)$ 与 $h(t)$ 均仅在部分区间非零, 故积分有效区间为

$$\begin{cases} x(\tau): 0 \leq \tau \leq 1 \\ h(t-\tau): 0 \leq t-\tau \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \tau \leq 1 & (1) \\ t-1 \leq \tau \leq t & (2) \end{cases}$$

积分有效区间为(1)(2)两区间的交集, 分情况讨论 t 的值:

情况 1: $t < 0$ 或 $t > 2$ 时, 两区间无重叠, $y(t) = 0$.

情况 2: $0 \leq t \leq 1$, 重叠区间为 $\tau \in [0, t]$, $y(t) = \int_0^t 1d\tau = t$.

情况 3: $1 < t \leq 2$ 时, 重叠区间为 $\tau \in [t-1, 1]$, $y(t) = \int_{t-1}^1 1d\tau = 2-t$.

整理写出最终结果为

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

该输出信号为一三角形脉冲, 时宽为 2, 峰值位于 $t = 1$ 处, 最大幅度为 1。

上述计算案例将抽象的卷积公式与具有

物理直观的时不变系统响应信号分析联系起来, 将概率论与数理统计课程与专业课程紧密联系起来, 为后续学习滤波、调制、检测等通信核心内容奠定基础。

三、结语

基于物理直观的教学案例为概率论与数理统计的抽象概念提供了具体生动的认知支点, 有助于帮助学生加深对相关概念的理解。本文给出了三个基于物理直观的教学案例: α 粒子散射实验、质心坐标模型、矩形脉冲信号卷积计算, 涉及到的知识点为泊松分布、数学期望与卷积公式。前两个案例适用于所有专业。案例三适用于通信工程等专业, 可在课堂上作为引申知识点, 也可以作为拓展阅读, 增加知识的高阶性和挑战度。

基金项目: 2025 年度湖南省学位与研究生教学改革研究项目“以生成式人工智能为抓手, 探索军队应用统计专业学位研究生人才培养模式”【2025JGYB022】。

作者简介: 陶红(1990-)女, 湖南浏阳, 博士, 国防科技大学理学院副教授, 研究方向为统计机器学习。

参考文献:

- [1] 臧鸿雁, 刘林, 张志刚. 概率论与数理统计教学案例研究[J]. 大学数学, 2022, 38(2): 39-44.
- [2] 金伟, 贾维敏, 牛超, 李夕海, 胡晶晶. 数字信号处理教学中的数学概念物理解释——以卷积为例[J]. 高师理科学刊, 2019(01): 67-70.
- [3] 吴翊, 汪文浩, 杨文强. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.

- [4] 徐小平, 郭高, 肖燕婷, 陈娟娟. 概率论与数理统计应用案例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- [5] 熊志明, 郭妍, 曹聚亮, 杨柏楠. “信号与系统”课程中卷积的教学探索[J]. 电气电子教学学报, 2024, 46(3): 143-146.
- [6] 安成锦, 韩慧, 王雪莹, 陈军. 卷积积分讲授方法的讨论[J]. 电气电子教学学报, 2024, 46(5): 143-144.

Teaching Case Design of Probability Theory and Mathematical Statistics Based on Physical Intuition

Tao Hong, Xu Yaokun, Liu Jiying, Hou Chenping

National University of Defense Technology, a.College of Science; b. College of Electronic Science, Changsha, Hunan 410073

Abstract: As a highly abstract mathematical discipline, the core concepts of probability theory and mathematical statistics often pose learning difficulties for students due to lack of intuitiveness. To enhance teaching effectiveness and strengthen students' understanding and application abilities, this paper draws on the teaching philosophy of "physical interpretation of mathematical concepts". Specifically, from the perspective of physical intuition, teaching cases are designed for the Poisson distribution, mathematical expectation, and convolution formula, based on the alpha particle scattering experiment, the center-of-mass coordinate model, and the convolution calculation of rectangular pulse signals, respectively. Teaching methods grounded in physical intuition help students build intuitive cognition, deepen conceptual understanding, and enhance their scientific thinking and engineering literacy.

Key words: physical interpretation of mathematical concepts; Teaching cases; Poisson distribution; Mathematical expectation; Convolution formula